PART3 自然数の 2 乗の和の公式

要点 ① 自然数の 2 乗の和の公式

1 から n までの自然数の 2 乗の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ を求める。

等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ において

$k=1$ のとき　　$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$k=2$ のとき　　$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

$k=3$ のとき　　$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$

⋮

$k=n$ のとき　　$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

これらの式を辺々加えると

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots\cdots+n)+1\cdot n$$

$$=3\qquad\quad+3\cdot\qquad\qquad+n$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2=(n+1)^3-\frac{3}{2}n(n+1)-(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2-3n-2\}=\frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

よって，等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ が成り立つ。

同様に，等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を用いると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が成り立つことを示すことができる。

数列の和の公式②

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

[MEMO]

3 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3k^2$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k^2-3k+2)$

Point Pickup

数列の和の公式②

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

第 3 講　PART3 確認問題

次の和を求めよ。

1　$\sum_{k=1}^{n} 6k^2 = n(n+\boxed{ア})(\boxed{イ}n+\boxed{ウ})$

2　$\sum_{k=1}^{n} (k^2+k+1) = \frac{n}{\boxed{エ}}(n^2+\boxed{オ}n+\boxed{カ})$

PART3 自然数の2乗の和の公式

3 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n} 3k^2$　　(2) $\sum_{k=1}^{n} (k^2-3k+2)$

[解答]

(1)
$$\sum_{k=1}^{n} 3k^2 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2$$
$$= 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

(2)
$$\sum_{k=1}^{n} (k^2-3k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 2n$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{9}{6}n(n+1) + \frac{12}{6}n$$
$$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - 9(n+1) + 12\}$$
$$= \frac{1}{6}n(2n^2-6n+4)$$
$$= \frac{1}{3}n(n^2-3n+2)$$
$$= \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$

第 3 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：1

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n} 6k^2 = 6\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{[A]}$$

$$= 6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \text{[B]}$$

$$= \boldsymbol{n(n+1)(2n+1)}$$

[A]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$　（c は定数）

[B]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

2

[正解] エ：3，オ：3，カ：5

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \quad \text{[C]}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) + n \quad \text{[D]}$$

$$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)+3(n+1)+6\}$$

$$= \frac{n}{6}(2n^2+6n+10)$$

$$= \boldsymbol{\frac{n}{3}(n^2+3n+5)}$$

[C]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

[D]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$　（c は定数）

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$